# 解答速報

## 福岡大学 医学部（推薦） 数学

2025年 11月23日実施

［Ⅰ］次の $\boxed{\phantom{00}}$ をうめよ。答は解答用紙の該当（がいとう）欄に記入せよ。

（ｉ） 関数 $y=(\log_2 2x)^2+\log_2(4x)^4+1$ の値が最小となる $x$ の値は $\boxed{(1)}$ である。

（ii） 箱の中に 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれたカードが，
それぞれ 4 枚ずつ合計 12 枚入っている。
この箱の中から 3 枚のカードを同時に取り出すとき，
3 枚のカードの数字の積が 6 以上となる確率は $\boxed{(2)}$ である。

（iii） 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 a_n$ $(n=2,3,4\ldots)$ を満たしている。

このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{(3)}$ である。

（iv） 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC の内部および辺上を動く点 P が
条件 $\mathrm{AP}^2 \leqq \mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ を満たすとき，
点 P が存在する領域の面積は $\boxed{(4)}$ である。

解答

(1) $\dfrac{1}{8}$　(2) $\dfrac{36}{55}$　(3) $\dfrac{2}{n(n+1)}$　(4) $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$

解説

（ｉ） 真数条件より $2x>0$ かつ $(4x)^4>0$

よって $x>0$

$y=(\log_2 2+\log_2 x)^2+4(\log_2 4+\log_2 x)+1$

$=(\log_2 x)^2+6\log_2 x+10$

$\log_2 x=t$ とおくと

$y=t^2+6t+10=(t+3)^2+1$

$t$ の範囲はすべての実数であるから 関数 $y$ は

$t=-3$ のとき最小値をとる。

このとき　$\log_2 x=-3$ より $x=2^{-3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

（ⅱ） 全てのカードの取り出し方は${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ (通り)

余事象を用いて 3 枚のカードの積が 5 以下になる場合を考える。

積が 5 になることはないので以下の場合になる。

| カードの数字の積 | カードの枚数 |
|---|---|
| 1 | $\boxed{1}$：3 枚 |
| 2 | $\boxed{1}$：2 枚 , $\boxed{2}$：1 枚 |
| 3 | $\boxed{1}$：2 枚 , $\boxed{3}$：1 枚 |
| 4 | $\boxed{1}$：1 枚 , $\boxed{2}$：2 枚 |

よって 3 枚のカードの数字の積が 5 以下になる確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2}{220} = \frac{4+24+24+24}{220} = \frac{19}{55}$$

したがって求める確率は　$1 - \frac{19}{55} = \boldsymbol{\frac{36}{55}}$

（ⅲ） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 a_n$　・・・①

この式は $n = 1$ のときにも成り立つ

①から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = (n+1)^2 a_{n+1}$　・・・②

②－①から

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$

$n(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n$

$(n+2)a_{n+1} = n a_n$

両辺 $n+1$ をかけて

$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)n a_n$

$(n+1)n a_n = b_n$ とおくと

$b_{n+1} = b_n = \cdots = b_1$, また $b_1 = 2 \cdot 1 a_1 = 2$

よって $(n+1)n a_n = 2$ から

$a_n = \boldsymbol{\frac{2}{n(n+1)}}$ （$n = 1$ のときにも成り立つ）

(ⅳ)　図のように原点を O とする $xy$ 平面 上に

A $\left(0, \sqrt{3}\right)$, B $(-1, 0)$, C$(1, 0)$ となるように座標をとる。

P $(x,\ y)$ とすると $\mathrm{AP}^2 \leqq \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ より

$x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \leqq (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2$

$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 \geqq 0$

$x^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 \geqq 4$

D$\left(0, -\sqrt{3}\right)$ とすると P の存在する領域は

△ABC の周および内部のうち，円 $x^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 = 4$

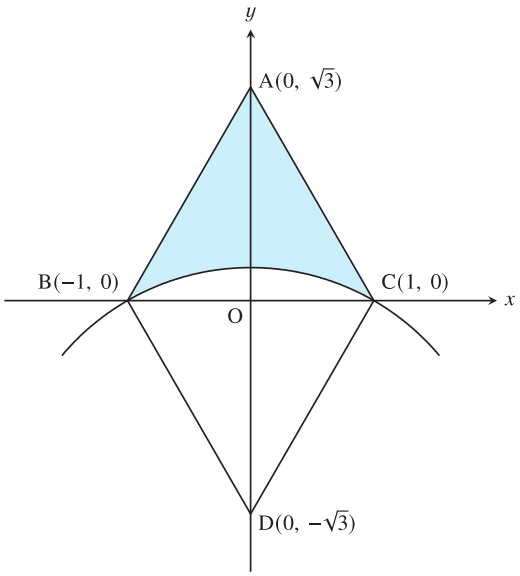
の周および外部にある部分である。

△ABC ≡△BCD であることから求める面積を$S$とおくと

$S$ ＝ 2△BCD − 扇形 DCB

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3}$

$= \boldsymbol{2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi}$




［Ⅱ］（記述問題）

曲線 $C_1$ ： $y = 2\sqrt{2x}$ $(x \geqq 0)$ と半円 $C_2$ ： $y = \sqrt{16 - (x-2)^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 6)$
について，次の問に答えよ。

(ⅰ) 曲線 $C_1$と半円 $C_2$の両方に接する直線 $l$ の方程式を求めよ。
(ⅱ) 曲線 $C_1$ ,半円 $C_2$ および直線 $l$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(ⅰ)　$C_1$ 上の接点を T $\left(t,\ 2\sqrt{2t}\right)$ とおくと $(t > 0)$

$C_1$ において,$y' = \sqrt{\frac{2}{x}}$ より

接線の方程式は

$y = \sqrt{\frac{2}{t}}(x - t) + 2\sqrt{2t}$　・・・①

$\sqrt{2}x - \sqrt{t}y + \sqrt{2}t = 0$

$C_2$ にも接するから $C_2$の中心$(2, 0)$ からの距離が $C_2$の半径に等しいので

$\frac{\left|2\sqrt{2} + \sqrt{2}t\right|}{\sqrt{2+t}} = 4$

$\left|2\sqrt{2} + \sqrt{2}t\right|^2 = 16(2 + t)$

$t^2 - 4t - 12 = 0$

$(t+2)(t-6)=0$

$t>0$ より $t=6$

① に代入して

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2\sqrt{3}}$$

(ⅱ) $C_2$の中心をA, $C_2$と$y$軸との交点を B, $C_1$と$C_2$との交点を D とする。

$C_2$の式で$x=0$ とすると，$y=2\sqrt{3}$

$2\sqrt{2x}=\sqrt{16-(x-2)^2}$ とすると

$8x=16-(x-2)^2$

$x^2+4x-12=0$

$(x-2)(x+6)=0$

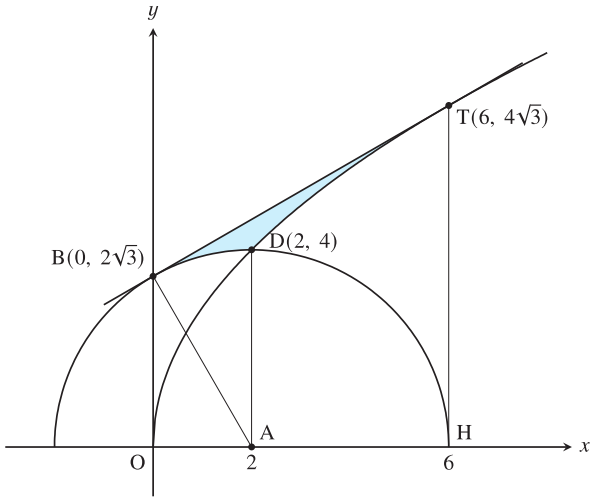
$x=2,-6$

$x>0$ より $x=2$

よって　A $(2,0)$, B$\left(0,2\sqrt{3}\right)$, D$(2,4)$

また H$(6,0)$ とする。

求める面積を$S$ とすると AB $\perp$ $l$ より




$S$＝台形 OHTB −△ OAB − 扇形 ADB $-\int_2^6 2\sqrt{2x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\right)\times 6-\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{6}-2\sqrt{2}\int_2^6\sqrt{x}dx$$

$$=18\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi-\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_2^6$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}\ (4-\pi)}$$

## 講評

［Ⅰ］［小問集合］

（ⅰ）［対数関数］（やや易）$\log_2 x = t$ と置き換えた $t$ の 2 次関数を考える。指数のかかっている部分に注意してミスなく計算する。教科書の例題にもあるような問題なので正答しておきたい。

（ⅱ）［確率］（やや易）余事象を考える。他の問題を考慮すると時間を少しかけてでも確実に正答しておきたい問題である。

（ⅲ）［数列］（標準）$n$ をずらして差をとる，両辺に $n+1$ をかけるなどの解法が出てこなかった人もいるであろう。差がつく問題である。

（ⅳ）［図形と方程式］（やや難）正三角形 ABC を座標平面上に表し，P の軌跡を求めればよい。図形の問題で座標をとる経験があれば何とかなるかもしれないが厳しい問題である。

［Ⅱ］［微積分］（やや難）

（ⅰ）$C_1$上に接点をとり，その接線が$C_2$ にも接するということを点と直線の距離を用いて計算していけばよい。円と無理関数のグラフの共通接線を求める経験はあまりしたことがないと思われる。

（ⅱ）台形の面積から不要な部分を取り除いていけばよい。接点や交点の座標を求めたり，作業量は少なくない。

形式に変化はなかったが昨年より難化した。試験時間に対して，分量が多いのは例年とおりである。
［Ⅰ］（ⅰ)(ⅱ)は確実に正答し，［Ⅱ］で部分点を稼ぎたいところである。目標は 45%。

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは… 英進館メビオ福岡校 0120-192-215 まで

医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 受付 9～21時(土日祝可・携帯からOK) 大阪市中央区石町 2-3-12 ベルヴォア天満橋 https://www.mebio.co.jp/

医学部専門予備校 YMS heart of medicine 03-3370-0410 受付 8～20時(土日祝可) 東京都渋谷区代々木 1-37-14 https://yms.ne.jp/

医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 福岡市中央区渡辺通 4-8-20 英進館 天神本館新2号館2階 https://www.mebio-eishinkan.com/