メルリックス英進館
医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

久留米大学医学部（推薦）　数学

2020年 11月21日実施

1.　全体集合 U に対し，どの集合も空集合でない 4 つの部分集合 A, B, C, D があり，これらの 4 つの集合について次の 6 つのことがわかっている。また，集合 C の補集合を $\overline{C}$ とする。

・集合 A の要素でないものは集合 B の要素でない。
・集合 B の要素でないものでも集合 C の要素となるものが存在する。
・集合 B と集合 C の両方の要素であるものが存在する。
・集合 C の要素はすべて集合 A の要素である。
・集合 D の要素で集合 C の要素となるものは存在しない。
・集合 D の要素はすべて集合 B の要素である。

(1)　次の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{⑤}$ に当てはまるものを，下の⓪～②のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　命題「$B \subset A$ である」は $\boxed{①}$。

(ii)　命題「$B \subset C$ である」は $\boxed{②}$。

(iii)　命題「$B \cap D \subset A$ である」は $\boxed{③}$。

(iv)　命題「$C \cap D \neq \phi$ である」は $\boxed{④}$。

(v)　命題「$\overline{C \cup \overline{D}} \subset (A \cap B)$ である」は $\boxed{⑤}$。

⓪　真である　　①　偽である　　②　真偽がわからない

(2)　次の $\boxed{⑥}$, $\boxed{⑦}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　集合 C の要素であることは，集合 A の要素であるための $\boxed{⑥}$。

(ii)　集合 A の要素であることは，集合 A 以外の集合の要素であるための $\boxed{⑦}$。

⓪　必要十分条件である
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要条件であるが，十分条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない

解答

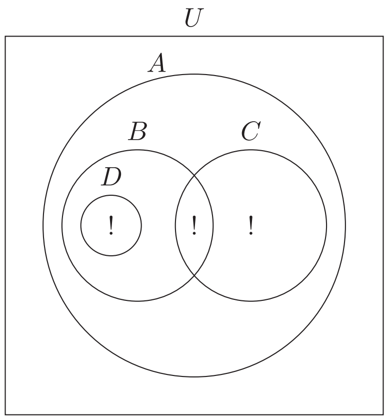
①⓪　②①　③⓪　④①　⑤⓪　⑥①　⑦②

解説

各々の条件を集合の記号で同値変形していくと次のようになる.

- •集合 A の要素でないものは集合 B の要素でない $\iff \overline{A} \subset \overline{B} \iff A \supset B$
- •集合 B の要素でないものでも集合 C の要素となるものが存在する $\iff \overline{B} \cap C \fallingdotseq \phi$
- •集合 B と集合 C の要素の両方の要素であるものが存在する $\iff B \cap C \fallingdotseq \phi$
- •集合 C の要素はすべて集合 A の要素である $\iff C \subset A$
- •集合 D の要素で集合 C の要素となるものは存在しない $\iff D \cap C = \phi$
- •集合 D の要素はすべて集合 B の要素である $\iff D \subset B$

これより集合の包含関係をベン図で表すと次のようになる.



ここで図中に！と書いたところには要素が存在する（空ではない）が，書いていないところに要素が存在しなくても構わない.

(1)　このベン図より答がわかる.

(i)　命題「$B \subset A$ である」は真である.

(ii)　命題「$B \subset C$ である」は偽である.

(iii)　命題「$B \cap D \subset A$ である」は真である.

(iv)　命題「$C \cap D \fallingdotseq \phi$ である」は偽である.

また (v) に関して，$\overline{C \cup \overline{D}} = \overline{C} \cap D = D$, $A \cap B = B$ であるから「$\overline{C \cup \overline{D}} \subset (A \cap B)$」は「$D \subset B$」と同値になり，この命題は真である.

(2)　(i)　$C \subset A$ かつ $C \fallingdotseq A$ であるから，集合 C の要素であることは，集合 A の要素であるための十分条件であるが，必要条件ではない.

(ii)　ベン図より集合 A の要素であることは「$B \cup C \cup D$ 」の要素であるための必要条件であるが，十分条件であるかどうかはわからない.（図の！以外の部分がすべて空であれば $A = B \cup C \cup D$ が成り立ち，必要十分条件となる.）一方，集合 A の要素であることは「B」の要素であるための必要条件であるが，十分条件ではない．それは B を C や D に変えても同じである.（$A \fallingdotseq B$, $A \fallingdotseq C$, $A \fallingdotseq D$ である.）

前者の解釈だと選択肢に正解がなくなってしまうので後者を答とした.「必要条件であるが，十分条件かどうかは判断できない」というのが適切かもしれない.

2. 白球が 30 個，赤球が 20 個入った袋があるとき，次の問いに答えよ。ただし，$\boxed{⑧}$，$\boxed{⑩}$ は，分母と分子が降べきの順に展開された 1 項の分数式で表せ。

(1) 袋の中から球を 1 個取り出し，色を調べてから取り出した球を袋に戻す操作を 20 回行うとき，白球が k 回取り出される確率を p_k とすると，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \boxed{⑧}$ であるから，確率 p_k が最大となる k の値は $k = \boxed{⑨}$ である。ただし，$0 \leqq k \leqq 19$ とする。

(2) 袋の中から球を 1 個取り出し，取り出した球を袋に戻さず色を調べる操作を 20 回行うとき，白球が k 回取り出される確率を q_k とすると，$\dfrac{q_{k+1}}{q_k} = \boxed{⑩}$ であるから，確率 q_k が最大となる k の値は $k = \boxed{⑪}$ である。ただし，$0 \leqq k \leqq 19$ とする。

解答

⑧ $\dfrac{-3k+60}{2k+2}$　⑨ 12　⑩ $\dfrac{k^2-50k+600}{k^2+2k+1}$　⑪ 12

解説

$$p_k = {}_{20}\mathrm{C}_k \left(\frac{30}{50}\right)^k \left(\frac{20}{50}\right)^{20-k} = \frac{3^k \cdot 2^{20-k} \cdot 20!}{k! \cdot (20-k)! \cdot 5^{20}}$$

であるので，

$$p_{k+1} = \frac{20! \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{19-k}}{(k+1)! \cdot (19-k)! \cdot 5^{20}}$$

となる．これより

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{3(20-k)}{2(k+1)} = \boldsymbol{\frac{-3k+60}{2k+2}}$$

また，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} < 1 \iff \dfrac{58-5k}{2(k+1)} < 0 \iff k \leqq 11$，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} > 1 \iff k \geqq 12$ より，

$$p_0 < p_1 < \cdots < p_{11} < p_{12} > p_{13} > \cdots > p_{20}$$

となるので，p_k が最大となる k の値は $k = \mathbf{12}$ である．

$$q_k = \frac{{}_{30}\mathrm{C}_k \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{20-k}}{{}_{50}\mathrm{C}_{20}}$$

であるので，

$$q_{k+1} = \frac{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{19-k}}{{}_{50}\mathrm{C}_{20}}$$

となる．これより，

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{(30-k)(20-k)}{(k+1)^2} = \boldsymbol{\frac{k^2-50k+600}{k^2+2k+1}}$$

また，$\dfrac{q_{k+1}}{q_k} < 1 \iff \dfrac{599-52k}{(k+1)^2} < 0 \iff k \leqq 11$，$\dfrac{q_{k+1}}{q_k} > 1 \iff k \geqq 12$ より，

$$q_0 < q_1 < \cdots < q_{11} < q_{12} > q_{13} > \cdots > q_{20}$$

となるので，q_k が最大となる k の値は $k = \mathbf{12}$ である．

3. 関数 $y = 8^{\frac{x}{2}} + 8^{-\frac{x}{2}} - 3 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{-x} - 6 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 6 \cdot 2^{-\frac{x}{2}} + 4$ について，次の問いに答えよ。

(1) $t = 2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}}$ とおくとき，y を t の式で表すと $\boxed{⑫}$ である。

(2) x がすべての実数をとって変化するとき，t のとりうる値の範囲は $\boxed{⑬}$ である。

(3) x がすべての実数をとって変化するとき，y の最小値は $\boxed{⑭}$ であり，そのときの x の値は $x = \log_2(\boxed{⑮}) - 1$ である。

解答

⑫ $y = t^3 - 3t^2 - 9t + 10$　⑬ $t \geqq 2$　⑭ -17　⑮ $7 \pm 3\sqrt{5}$

解説

(1) $t^3 = (2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}})^3 = 8^{\frac{x}{2}} + 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 3 \cdot 2^{-\frac{x}{2}} + 8^{-\frac{x}{2}}$ より，$8^{\frac{x}{2}} + 8^{-\frac{x}{2}} = t^3 - 3t$.
$t^2 = (2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}})^2 = 2^x + 2 + 2^{-x}$ より，$2^x + 2^{-x} = t^2 - 2$.
これらより，$y = (t^3 - 3t) - 3(t^2 - 2) - 6t + 4 = \boldsymbol{t^3 - 3t^2 - 9t + 10}$ が得られる.

(2) $2^{\frac{x}{2}} > 0,\ 2^{-\frac{x}{2}} > 0$ なので，相加平均・相乗平均の関係により $t \geqq 2\sqrt{2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{-\frac{x}{2}}} = 2$ が成り立つ．等号は $\dfrac{x}{2} = -\dfrac{x}{2}$，すなわち $x = 0$ のとき成り立つので，t のとり得る値の範囲は $\boldsymbol{t \geqq 2}$ となる.

(3) $f(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 10$ とおくと，$f'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$ より，$t \geqq 2$ における $f(t)$ の増減は以下のようになる.

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-12	$\searrow$	-17	$\nearrow$

よって y の最小値は $\boldsymbol{-17}$ となる.
このとき，$t = 3$ であるので，

$$\begin{aligned} &2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = 3 \\ \Longleftrightarrow\ &(2^{\frac{x}{2}})^2 - 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &2^{\frac{x}{2}} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

この両辺の対数を底 2 でとると，

$$\begin{aligned} &\log_2 2^{\frac{x}{2}} = \log_2 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{x}{2} = \log_2 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \Longleftrightarrow\ &x = \log_2 \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \log_2(\boldsymbol{7 \pm 3\sqrt{5}}) - 1 \end{aligned}$$

4. 実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 2$ を満たすとき，点 $(x-y,\ xy)$ が存在する領域を D とする。

(1) $x-y=s,\ xy=t$ とするとき，不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$ を s と t だけで表すと $\boxed{\text{⑯}}$ である。

(2) 実数 $s,\ t$ に対して，$x,\ y$ が実数となるような $s,\ t$ の条件式は $\boxed{\text{⑰}}$ である。

(3) 領域 D の面積は $\boxed{\text{⑱}}$ である。

解答

⑯ $s^2+2t \leqq 2$　⑰ $s^2+4t \geqq 0$　⑱ $\dfrac{8}{3}$

解説

(1) 実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 2$ を満たすとき，

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=s^2+2t$$

なので $\boldsymbol{s^2+2t \leqq 2}$ となる．

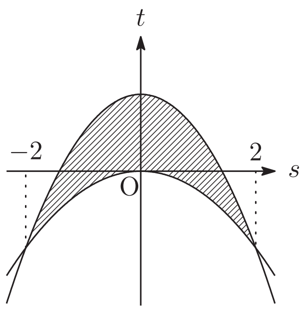
(2) 「$x,\ y$ が実数 $\iff$ $x,\ -y$ が実数」である．

$$x+(-y)=s,\ x\cdot(-y)=-t$$

なので，$x,\ -y$ を解とする方程式は $X^2-sX-t=0$ となる．これが実数解をもつ条件を求めればよい．よって

$$(\text{判別式})=\boldsymbol{s^2+4t \geqq 0}$$

(3) 領域 D は図示すると右のようになる．2 曲線の交点の s 座標は $s^2-2t=2,\ s^2+4t=0$ を連立することにより $s=\pm 2$ となる．これより領域 D の面積は



$$\int_{-2}^{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}s^2+1\right)-\left(-\frac{1}{4}s^2\right)\right\}ds$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left\{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdot\{2-(-2)\}^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

5. 次の (i), (ii), (iii) の【ルール】で点 $(x,\ y)$ に番号をふっていく。ただし，$x,\ y$ を 0 以上の整数とする。

(i) 点 $(0,\ 0)$ を 1 番とする。

(ii) $x+y=1$ から順に $x+y=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ のそれぞれの場合を考え，点に番号をふっていく。

(iii) $x+y$ が奇数のとき，点 $(x+y,\ 0)$ を最初の番号とし，x 座標を -1，y 座標を $+1$ するごとに番号を 1 つずつ増やし，x 座標が 0 になるまで番号をふり続ける。また，$x+y$ が偶数のとき，点 $(0,\ x+y)$ を最初の番号とし，x 座標を $+1$，y 座標を -1 するごとに番号を 1 つずつ増やし，y 座標が 0 になるまで番号をふり続ける。

先生と花子さんの二人の会話を読み，それぞれの問いに答えよ。

花子 ：【ルール】が複雑ですね。
先生 ：そうですね。こういうときは，2 番目の点から具体的に書き出してみましょう。
花子 ：点 $\boxed{⑲}$ が 2 番で，点 $\boxed{⑳}$ が 3 番で，4 番目の点は $(0,\ 2)$ ですね。

(1) $\boxed{⑲}$, $\boxed{⑳}$ に当てはまる座標を答えよ。

先生 ：【ルール】が把握できたところで，点 $(20,\ 21)$ が何番目の点か求めてみましょう。
花子 ：$x+y=41$ なので，すべてを書き出すのは大変ですね。
先生 ：そうですね。だからまず，$x+y=41$ の場合の最初の点が何番目の点かを考えてみましょう。
花子 ：はい。$x+y=41$ の最初の点は，$x+y=40$ の最後の点の次の点だから，$x+y=40$ の最後の点が何番目の点かがわかればいいんですね。
先生 ：そうですね。これでもうわかりましたね。
花子 ：はい。$x+y=41$ の最初の点は $\boxed{㉑}$ 番目だから，点 $(20,\ 21)$ は $\boxed{㉒}$ 番目の点ですね。

(2) $\boxed{㉑}$, $\boxed{㉒}$ に当てはまる数字を答えよ。

先生 ：次は，2021 番目の点を求めてみましょう。
花子 ：2021 番目の点は $x+y=$ $\boxed{㉓}$ に含まれる点ですよね。
先生 ：そうですね。それがわかると 2021 番目の点はわかりますよね。
花子 ：はい。2021 番目の点は点 $\boxed{㉔}$ ですね。

(3) $\boxed{㉓}$, $\boxed{㉔}$ に当てはまる数字や座標を答えよ。

(4) n を自然数とする。二人の会話を参考にすると，x 軸上の点で，点 $(0,\ 0)$ から点 $(2n-1,\ 0)$ までにふられている番号の和は $\boxed{㉕}$ である。ただし，$\boxed{㉕}$ は，分母と分子が降べきの順に展開された 1 項の分数式で表せ。

解答

⑲ $(1,\ 0)$　⑳ $(0,\ 1)$　㉑ 862　㉒ 883　㉓ 63　㉔ $(59,\ 4)$　㉕ $\dfrac{4n^3+3n^2+2n}{3}$

解説

(1)　$x+y$ の値，番号，座標の関係は右のようになる．よって，点 $\mathbf{(1,\ 0)}$ が 2 番で，点 $\mathbf{(0,\ 1)}$ が 3 番である．

$x+y$	番号	座標
0	1	(0, 0)
1	2	(1, 0)
	3	(0, 1)
2	4	(0, 2)
	5	(1, 1)
	6	(2, 0)
3	7	(3, 0)
	8	(2, 1)
	9	(1, 2)
	10	(0, 3)
4	11	(0, 4)
	12	(1, 3)
	13	(2, 2)
	14	(3, 1)
	15	(4, 0)
5	16	(5, 0)
⋮	⋮	⋮

(2)　$x+y=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ となる座標の個数は $k+1$ 個であるから，$x+y=40$ の最後の点までの座標の個数は，

$$\sum_{k=0}^{40}(k+1)=\frac{1}{2}\cdot 41\cdot 42=861\ (個)$$

である．よって $x+y=41$ の最初の点は $\mathbf{862}$ 番目であり，その座標は $(41,\ 0)$ である．したがって，点 $(20,\ 21)$ は $862+21=\mathbf{883}$ 番目の点である．

(3)　$x+y=0$ つまり点 $(0,\ 0)$ から $x+y=n$ の最後の点までの座標の個数（つまり番号）を T_n とすると，

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\ (個)$$

であり，これより $T_{62}=\dfrac{1}{2}\cdot 63\cdot 64=2016$ がわかる．したがって，2021 番目の点は $x+y=\mathbf{63}$ に含まれ，また $x+y=63$ の最初の点 $(63,\ 0)$ から数えて 5 番目の点とわかるので，その座標は $\mathbf{(59,\ 4)}$ である．

(4)　題意から，右表の点についてその番号の和を求めればよい．したがって求める和は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{T_{2k-2}+(T_{2k-2}+1)\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{k(2k-1)+k(2k-1)+1\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-2k+1)\\
&=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\
&=\boldsymbol{\frac{4n^3+3n^2+2n}{3}}
\end{aligned}$$

$x+y$	番号	座標
0	$T_0=1$	$(0,\ 0)$
1	$T_0+1=2$	$(1,\ 0)$
2	$T_2=6$	$(2,\ 0)$
3	$T_2+1=7$	$(3,\ 0)$
4	$T_4=15$	$(4,\ 0)$
5	$T_4+1=16$	$(5,\ 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n-2$	T_{2n-2}	$(2n-2,\ 0)$
$2n-1$	$T_{2n-2}+1$	$(2n-1,\ 0)$

講評

1.［集合と命題］（やや難）与えられた情報を正確にベン図に表現できればよいのだが，集合に慣れていないと容易ではないだろう．ド・モルガンの法則なども常識的に使えないといけない．またベン図の領域で要素がなくてよいところにも注意が必要である．

2.［確率］（標準）確率の最大値を隣接二項の比から求める典型的な問題である．計算結果が妥当かどうかは球の個数から常識的に判断できるだろう．

3.［指数対数］（やや易）y を t の式で表したあとは 3 次関数の最小値を求める問題に帰着する．誘導も丁寧なので完答したい．

4.［数学 II の微積分］（標準）前半は解と係数の関係より実数解が存在する条件を求める問題で後半は領域の面積を求める問題．$x+y$ ではなく $x-y$ となっているので，解と係数の関係を用いることに気づけるかがポイント．面積は $\dfrac{1}{6}$ 公式が利用できる．

5.［数列］（やや難）座標平面上の格子点に番号をふっていくことでできる群数列について考える問題である．ルールはわかってしまえば簡単だが，説明文が長く，意味を正しくとれなかった受験生も多かったと思われる．作業量も多く，完答するのは容易ではない．

昨年度とは大きく様変わりした．まず，マーク形式だったのが空所補充形式となった．また昨年度と比較すると問題が難化し，分量も増えている．大問 2，3，4 でなるべく得点をかせいだ上で，大問 1, 5 でどれだけ立ち回れたかの勝負だろう．目標点は 60%．