解答速報

久留米大学医学部（前期）　数学

2021年 2月1日実施

1.　3 次方程式 $x^3-2(a+1)x^2+(5a^2+1)x+b=0\cdots(*)$ がある。ただし，a は負の定数とする。

(1)　3 次方程式 $(*)$ が $x=2$ を解にもつとき，$b=-\boxed{\text{アイ}}a^2+\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}$ であり，

$$\begin{aligned}&x^3-2(a+1)x^2+(5a^2+1)x+b\\&=(x-2)\left(x^2-\boxed{\text{オ}}ax+\boxed{\text{カ}}a^2-\boxed{\text{キ}}a+\boxed{\text{ク}}\right)\end{aligned}$$

となる。

(2)　3 次方程式 $(*)$ の 3 つの解を 2, z, w とするとき，複素数平面上において 3 点 2, z, w を結んでできる三角形が直角二等辺三角形となる a，b の値は $a=\boxed{\text{ケコ}}$，$b=\boxed{\text{サシス}}$ であり，このときの z，w は $\boxed{\text{セソ}}\pm\boxed{\text{タ}}i$ である。

解答

解答記号	正解
$b=-\boxed{\text{アイ}}a^2+\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}$	$b=-10a^2+8a-2$
$(x-2)\left(x^2-\boxed{\text{オ}}ax+\boxed{\text{カ}}a^2-\boxed{\text{キ}}a+\boxed{\text{ク}}\right)$	$(x-2)(x^2-2ax+5a^2-4a+1)$
$a=\boxed{\text{ケコ}}$	$a=-1$
$b=\boxed{\text{サシス}}$	$b=-20$
$\boxed{\text{セソ}}\pm\boxed{\text{タ}}i$	$-1\pm3i$

解説

(1)　$(*)$ の左辺を $P(x)$ とすると，

$$\begin{aligned}P(2)&=2^3-2(a+1)\cdot2^2+(5a^2+1)\cdot2+b\\&=10a^2-8a+2+b\end{aligned}$$

「$(*)$ が $x=2$ を解にもつ」 $\Longleftrightarrow$ 「$(*)$ の左辺が $(x-2)$ を因数にもつ」とき，因数定理より $P(2)=0$ であるため，

$$10a^2-8a+2+b=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{b=-10a^2+8a-2}$$

このとき，$(*)$ の左辺は，定数項 $b=-2(5a^2-4a+1)$ に注目し，

$$x^3-2(a+1)x^2+(5a^2+1)x+b=(x-2)(\ \boldsymbol{x^2-2ax+5a^2-4a+1}\ )$$

と因数分解できる。

$$\left(\begin{array}{l}\text{定数項 } b=-2(5a^2-4a+1) \text{ に注目すると割り算なしに因数分解可能。因数分解したとき，}\\ x^3-2(a+1)x^2+(5a^2+1)x-2(5a^2-4a+1)=(x-2)(x^2+\bigcirc x+5a^2-4a+1) \text{ となる。}\\ \bigcirc \text{ 部分については，展開したときの } x^2 \text{ の係数を比較し，}\\ -2(a+1)x^2=-2\cdot x^2+x\cdot\bigcirc x \quad \therefore \bigcirc=-2a \text{ と決定できる。}\end{array}\right)$$

(別解)

$(*)$ の左辺を $x-2$ で割ると，商が $x^2-2ax+5a^2-4a+1$，余りが $10a^2-8a+2+b$ となるため，

$$x^3-2(a+1)x^2+(5a^2+1)x+b=(x-2)(x^2-2ax+5a^2-4a+1)+10a^2-8a+2+b$$

と変形できる。$(*)$ が $x=2$ を解にもつとき，

$$10a^2-8a+2+b=0 \iff \boldsymbol{b=-10a^2+8a-2}$$

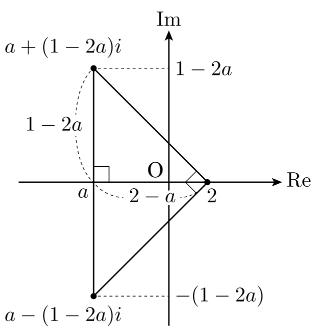
(以下省略)

(2) $x^2-2ax+5a^2-4a+1=0\cdots$① の判別式を D をすると，

$$\begin{aligned} D/4&=(-a)^2-1\cdot(5a^2-4a+1)\\ &=-(2a-1)^2\leqq 0\end{aligned}$$

$D<0$ となるのは $a\neq\dfrac{1}{2}$ のときであるため，$a<0$ であれば ① は虚数解をもつ。これらを求めると，

$$\begin{aligned} x&=a\pm\sqrt{(2a-1)^2}\,i\\ &=a\pm(1-2a)i\cdots② \quad (\because a<0)\end{aligned}$$



点 2 は実軸上の点である。① の虚数解の実部 a は負であり，共役な複素数は実軸対称となる点であるため，3 点 2，z，w が直角二等辺三角形になるとき，

$$2-a=1-2a \iff \boldsymbol{a=-1}$$

(1) より，

$$\boldsymbol{b=-20}$$

このとき，② より，

$$x=-1\pm3i$$

よって，z，w は $\boldsymbol{-1\pm3i}$ である。

（$D<0$ 以降の別解）

① の虚数解の一方を z とする。x についての方程式 ① は実数係数の方程式より，もう一方の虚数解は $w=\overline{z}$ である。3 点 2，z，$\overline{z}$ を結んでできる三角形が直角二等辺三角形であるため，

$$|z-\overline{z}|=\sqrt{2}|z-2|$$

よって，

$$\begin{aligned}|z-\overline{z}|^2=2|z-2|^2 &\iff (z-\overline{z})\,(\overline{z}-z)=2(z-2)\,(\overline{z}-2)\\ &\iff -z^2+2z\overline{z}-\overline{z}^2=2z\overline{z}-4\,(z+\overline{z})+8\\ &\iff z^2+\overline{z}^2-4\,(z+\overline{z})+8=0\cdots③\end{aligned}$$

ここで，z，$\overline{z}$ は ① の解であるため，2 次方程式の解と係数の関係より，

$$z+\overline{z}=2a\cdots④,\ \ z\overline{z}=5a^2-4a+1$$

よって，

$$\begin{aligned}z^2+\overline{z}^2&=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}\\&=(2a)^2-2(5a^2-4a+1)\\&=-6a^2+8a-2\cdots⑤\end{aligned}$$

③ に ④，⑤ を代入すると，

$$\begin{aligned}(-6a^2+8a-2)-4\cdot 2a+8=0 &\iff -6a^2+6=0\\ &\iff a^2=1\end{aligned}$$

$a<0$ より，

$$\boldsymbol{a=-1}$$

（以下省略）

2. 座標平面上に，直線 $\ell : 2x + y - 5 = 0$ と円 $C : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ がある。

(1) 直線 ℓ が円 C から切り取られる線分の長さは $\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツテト}}}{\boxed{ナ}}$ であり，その線分の中点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}, \dfrac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒ}}\right)$ である。

(2) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点を通り，y 軸に接する円のうち，半径が小さい方の中心の x 座標は

$x = \boxed{フヘ} - \boxed{ホ}\sqrt{\boxed{マミ}}$ である。

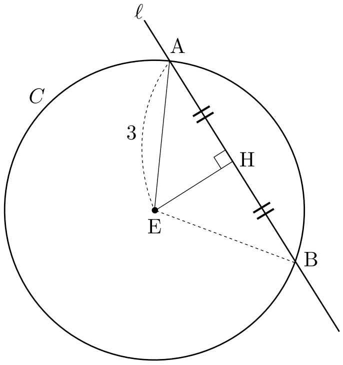
解答

解答記号	正解
$\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツテト}}}{\boxed{ナ}}$	$\dfrac{2\sqrt{205}}{5}$
$\left(\dfrac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}, \dfrac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒ}}\right)$	$\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{-3}{5}\right)$
$x = \boxed{フヘ} - \boxed{ホ}\sqrt{\boxed{マミ}}$	$14 - 2\sqrt{31}$

解説

(1) 円 C の方程式は $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ と変形できるので，円 C の中心の座標は $(2, -1)$，半径は 3 である。

この円 C と直線 ℓ の交点を A，B とし，弦 AB の中点を H，円 C の中心を E とする。



線分 EH の長さは，点 E$(2, -1)$ と直線 $\ell : 2x + y - 5 = 0$ との距離であるため，

$$\begin{aligned} \mathrm{EH} &= \frac{|2 \cdot 2 - 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|-2|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$\mathrm{EA} = 3$ であるため，$\triangle$AEH において三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{41}{5}}\\ &= \frac{\sqrt{205}}{5}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= 2\mathrm{AH}\\ &= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{205}}{5}}\end{aligned}$$

また，円 C の中心を通り，直線 ℓ に垂直な直線の方程式は，

$$(x-2) - 2(y+1) = 0 \iff x - 2y - 4 = 0$$

これを直線 m とすると，点 H は ℓ と直線 m の交点である。

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

よって，求める座標は $\boldsymbol{\left(\frac{14}{5},\ -\frac{3}{5}\right)}$ である。

(中点の座標の別解)

円 C と直線 ℓ の式より，y を消去すると，

$$(x-2)^2 + (-2x+6)^2 = 9 \iff 5x^2 - 28x + 31 = 0 \cdots ①$$

方程式 ① の解を α，β とすると，2 次方程式の解と係数の関係より，

$$\alpha + \beta = \frac{28}{5}$$

点 H の x 座標は，

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{14}{5}$$

このとき，

$$y = -\frac{3}{5}$$

よって，求める座標は $\boldsymbol{\left(\frac{14}{5},\ -\frac{3}{5}\right)}$ である。

(2) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点を通る円の方程式は，実数 k を用いて，

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 + k(2x + y - 5) = 0\\ \iff\ & x^2 + y^2 + 2(k-2)x + (k+2)y - 5k - 4 = 0\\ \iff\ & \{x + (k-2)\}^2 + \left(y + \frac{k+2}{2}\right)^2 = (k-2)^2 + \frac{(k+2)^2}{4} + 5k + 4 \cdots ②\end{aligned}$$

と表せる。また，$x = 0$ のとき，

$$y^2 + (k+2)y - 5k - 4 = 0 \cdots ③$$

円 ② が y 軸に接するためには，y についての方程式 ③ が重解をもてばよい。③ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D &= (k+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5k-4) \\ &= k^2 + 24k + 20\end{aligned}$$

$D = 0$ のとき,

$$k^2 + 24k + 20 = 0 \iff k = -12 \pm 2\sqrt{31}$$

円 ② は y 軸に接するので，その半径は,

$$\begin{aligned}|-k+2| &= \left|-\left(-12 \pm 2\sqrt{31}\right) + 2\right| \\ &= 14 \mp 2\sqrt{31} \quad \text{（複号同順）}\end{aligned}$$

このうち半径が小さい方は $k = -12 + 2\sqrt{31}$ のときであり，このときの中心の x 座標は,

$$\begin{aligned}-(k-2) &= -\left\{\left(-12 + 2\sqrt{31}\right) - 2\right\} \\ &= \mathbf{14 - 2\sqrt{31}}\end{aligned}$$

(② 以降の別解)

円 ② の中心の座標は $\left(-k+2, -\dfrac{k+2}{2}\right)$ であり，y 軸に接するので，半径は $|-k+2|$ である。よって,

$$\begin{aligned}|-k+2|^2 = (k-2)^2 + \frac{(k+2)^2}{4} + 5k + 4 &\iff k^2 + 24k + 20 = 0 \\ &\iff k = -12 \pm 2\sqrt{31}\end{aligned}$$

(以下省略)

3. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=0$，$(n+2)a_{n+1}=na_n+\dfrac{4n}{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。

(1) $(n+1)na_n=b_n$ とおくことで，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると，$a_n=\dfrac{\boxed{\text{ム}}\left(n-\boxed{\text{メ}}\right)}{n+\boxed{\text{モ}}}$ である。

(2) r を実数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2r)^{n+1}$ が正の実数値に収束するような r の値は $r=\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ であり，このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(ra_n)^{n+1}$ の極限値を p とすると，$\log p=\boxed{\text{ヨラ}}$ である。

解答

解答記号	正解
$a_n=\dfrac{\boxed{\text{ム}}\left(n-\boxed{\text{メ}}\right)}{n+\boxed{\text{モ}}}$	$a_n=\dfrac{2(n-1)}{n+1}$
$r=\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$	$r=\dfrac{1}{2}$
$\log p=\boxed{\text{ヨラ}}$	$\log p=-2$

解説

(1) 漸化式の両辺に $n+1$ をかけると，

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+4n$$

$(n+1)na_n=b_n\cdots$① とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+4n$$

また，

$$\begin{aligned}b_1&=2\cdot1\cdot a_1\\&=0\end{aligned}$$

$n\geqq2$ において，

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k\\&=0+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\\&=2n(n-1)\end{aligned}$$

これは，$n=1$ においても成り立つためすべての自然数 n において，

$$b_n=2n(n-1)$$

① より，

$$(n+1)na_n=2n(n-1)\qquad\therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{2(n-1)}{n+1}}$$

⑵　$\lim_{n \to \infty} (2r)^{n+1}$ が 0 でない実数値に収束するとき，

$$2r = 1 \iff \boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$$

このとき，

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n \to \infty} (ra_n)^{n+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \right\}^{-2} \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \log p &= \log e^{-2} \\ &= \boldsymbol{-2} \end{aligned}$$

4.　正の約数の個数が 12 個である自然数について，次の問いに答えよ。

(1) 素因数が 2 と 3 だけで，2 と 3 の両方の素因数を含むものは **あ** 個ある。

(2) 一番小さい自然数は **いう** であり，その自然数の正の約数の総和は **えおか** である。

(3) 三番目に小さい自然数は **きく** であり，その自然数の正の約数のうち 8 番目に小さな約数は **けこ** である。

解答

解答記号	正解
あ 個	4 個
いう	60
えおか	168
きく	84
けこ	14

解説

以下，約数は正の約数のみを考える。

(1) a，b を自然数とする。$2^a \cdot 3^b$ の約数の個数は $(a+1)(b+1)$ 個であり，これが 12 であるとき，$a+1 \geqq 2$，$b+1 \geqq 2$ に注意すると，

$$(a+1,\ b+1) = (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$$
$$\therefore (a,\ b) = (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (5,\ 1)$$

$(a,\ b)$ の組が異なれば $2^a \cdot 3^b$ の値も異なるので，条件を満たす自然数は **4 個** である。

(2) (1) の条件を満たす自然数は，

$$2^1 \cdot 3^5 = 486,\ 2^2 \cdot 3^3 = 108,\ 2^3 \cdot 3^2 = 72,\ 2^5 \cdot 3^1 = 96$$

また，素因数を 3 個もつものについて，素数 p，q，r $(p < q < r)$ と自然数 a，b，c で $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ の形に表せるものの約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個であるため，a，b，c のうち 1 つが 2，2 つが 1 であり，

$$p^2qr < pq^2r < pqr^2$$

この形で最小のものは，

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

である。また，素因数を 4 個以上もつと，約数は $2^4 = 16$ 個以上となるため不適である。よって，約数を 12 個もつ最小の自然数は **60** である。60 の約数の総和は，

$$\begin{aligned}(1+2+2^2)(1+3)(1+5) &= 7 \cdot 4 \cdot 6 \\ &= \mathbf{168}\end{aligned}$$

⑶ 素因数を 2 個もつもので，⑵ で挙げたものの次に素因数が小さいものは，

$$2^1 \cdot 5^5 = 6250,\ \ 2^2 \cdot 5^3 = 500,\ \ 2^3 \cdot 5^2 = 200,\ \ 2^5 \cdot 5^1 = 160$$

素因数が 3 つのものでは，

$$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

素因数が 1 つのものでは，

$$2^{11} = 2048$$

であるため，3 番目に小さいものは **84** である。84 の約数は，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12,\ 14,\ 21,\ 28,\ 42,\ 84$$

より，8 番目に小さな約数は **14** である。

5. 座標平面上において，曲線 $y=-\cos\dfrac{x}{2}\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と曲線 $y=\sin\dfrac{x}{4}\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と y 軸で囲まれた領域を D とする。

(1) 領域 D の面積は $\boxed{\text{さ}}$ である。

(2) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\left(\boxed{\text{し}}\pi+\boxed{\text{す}}\sqrt{\boxed{\text{せ}}}\right)\pi}{\boxed{\text{そ}}}$ である。

(3) 領域 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{たち}}\pi$ である。

解答

解答記号	正解
$\boxed{\text{さ}}$	4
$\dfrac{\left(\boxed{\text{し}}\pi+\boxed{\text{す}}\sqrt{\boxed{\text{せ}}}\right)\pi}{\boxed{\text{そ}}}$	$\dfrac{\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)\pi}{4}$
$\boxed{\text{たち}}\pi$	16π

解説

(1) 2 つの曲線の式より，y を消去すると，

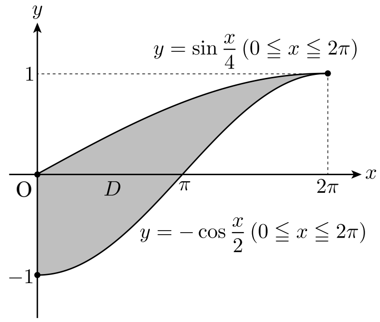
$$\begin{aligned}-\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{4} &\iff \sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{2}=0\\ &\iff \sin\frac{x}{4}+\left(1-2\sin^2\frac{x}{4}\right)=0\\ &\iff \left(1-\sin\frac{x}{4}\right)\left(1+2\sin\frac{x}{4}\right)=0\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$0 \leqq \sin\dfrac{x}{4} \leqq 1$ より，

$$\sin\frac{x}{4}=1 \qquad \therefore x=2\pi$$

また，

$$\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{2}=\left(1-\sin\frac{x}{4}\right)\left(1+2\sin\frac{x}{4}\right) \geqq 0 \iff -\cos\frac{x}{2} \leqq \sin\frac{x}{4}$$



求める面積は，

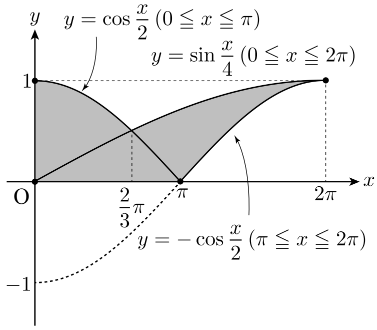
$$\int_0^{2\pi}\left\{\sin\frac{x}{4}-\left(-\cos\frac{x}{2}\right)\right\}dx=\left[-4\cos\frac{x}{4}+2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=\mathbf{4}$$

(2) 曲線 $y=-\cos\dfrac{x}{2}$ の $y\leqq 0$ の部分，すなわち，$0\leqq x\leqq\pi$ の部分を x 軸に関して対称に移動させた曲線 $y=\cos\dfrac{x}{2}$ と，曲線 $y=\sin\dfrac{x}{4}$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における交点を考える。y を消去すると，

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{4}=\cos\frac{x}{2}&\iff\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{2}=0\\&\iff\sin\frac{x}{4}-\left(1-2\sin^2\frac{x}{4}\right)=0\\&\iff\left(\sin\frac{x}{4}+1\right)\left(2\sin\frac{x}{4}-1\right)=0\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ において，$0\leqq\sin\dfrac{x}{4}\leqq 1$ より，

$$\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\qquad\therefore x=\frac{2}{3}\pi$$

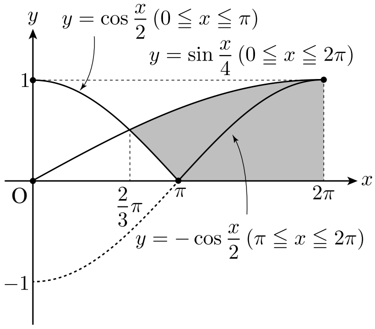


求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx-\pi\int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(1+\cos x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx-\frac{\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi}(1+\cos x)dx\\&=\frac{\pi}{2}\left(\Big[x+\sin x\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[x-2\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}-\Big[x+\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(2\pi-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)-(2\pi-\pi)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)\pi}{4}}\end{aligned}$$

(別解)

曲線 $y=-\cos\dfrac{x}{2}$ の $y\leqq 0$ の部分を x 軸に関して対称に移動させた曲線 $y=\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$ は，直線 $x=\pi$ に関して対称である。$y=\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$ の $0\leqq x\leqq\pi$ の部分を直線 $x=\pi$ について折り返して考えると，



$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx-\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(1+\cos x)dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi}dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}\cos\frac{x}{2}dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos x dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\Big[x\Big]_{\pi}^{2\pi}-\Big[2\sin\frac{x}{2}\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{(2\pi-\pi)-\left(0-\sqrt{3}\right)-\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

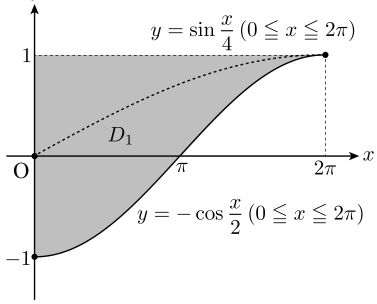
(3) (バウムクーヘン分割を用いる。)

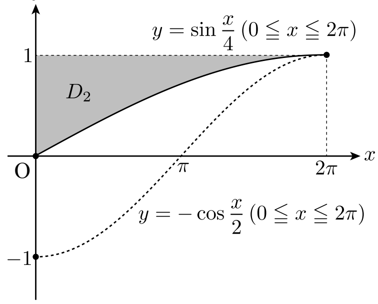
求める体積を V' とすると，

$$
\begin{aligned}
V' &= 2\pi\int_0^{2\pi}x\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{2}\right)dx \\
&= 2\pi\left\{\left[x\left(-4\cos\frac{x}{4}+2\sin\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\left(-4\cos\frac{x}{4}+2\sin\frac{x}{2}\right)dx\right\} \\
&= 4\pi\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
&= 4\pi\left[8\sin\frac{x}{4}+2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi\{(8-2)-(0+2)\} \\
&= \boldsymbol{16\pi}
\end{aligned}
$$

(別解)

求める体積を V' とする。





図の領域 D_1，D_2 を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，

$$V' = V_1 - V_2 \cdots ①$$

ここで，$y = -\cos\dfrac{x}{2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \qquad \therefore dy = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}dx$$

また，$y : -1 \to 1$ のとき，$x : 0 \to 2\pi$ より，

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-1}^{1} \pi x^2 dy \\ &= \pi \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} x^2 \sin\frac{x}{2}dx \cdots ② \end{aligned}$$

同様に，$y = \sin\dfrac{x}{4}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4} \qquad \therefore dy = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}dx$$

また，$y : 0 \to 1$ のとき，$x : 0 \to 2\pi$ より，

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{0}^{1} \pi x^2 dy \\ &= \pi \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} x^2 \cos\frac{x}{4}dx \cdots ③ \end{aligned}$$

①〜③ より，

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} x^2 \sin\frac{x}{2}dx - \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} x^2\cos\frac{x}{4}dx \\ &= \pi\int_0^{2\pi} x^2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}\right)dx \\ &= \pi\int_0^{2\pi} x^2\left(-\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{4}\right)' dx \\ &= \pi\left[x^2\left(-\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{4}\right)\right]_0^{2\pi} - \pi\int_0^{2\pi} 2x\left(-\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{4}\right)dx \\ &= 2\pi\int_0^{2\pi} x\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4}\right)dx \\ &= 2\pi\int_0^{2\pi} x\left(2\sin\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{4}\right)' dx \\ &= 2\pi\left[x\left(2\sin\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{4}\right)\right]_0^{2\pi} - 2\pi\int_0^{2\pi}\left(2\sin\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{4}\right)dx \\ &= 4\pi\int_0^{2\pi}\left(-\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{4}\right)dx \\ &= 4\pi\left[2\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{4}\right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi\{(-2+8) - (2+0)\} \\ &= \boldsymbol{16\pi} \end{aligned}$$

6. 関数 $f(x)=|x^2-x-3|$ と $g(x)=\left|\left|\frac{3}{2}x+3\right|-\left|\frac{3}{2}x-10\right|\right|$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x<-2$ のとき，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数は $\boxed{\text{つ}}$ 個である。

(2) (1) 以外の x の範囲について考えることで，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数は $\boxed{\text{て}}$ 個であり，その共有点のうち，x 座標が最も大きいのは $x=\boxed{\text{とな}}+\sqrt{\boxed{\text{にぬ}}}$ である。ただし，共有点が 1 個の場合は，その共有点の x 座標を答えよ。

解答

解答記号	正解
$\boxed{\text{つ}}$ 個	1 個
$\boxed{\text{て}}$ 個	3 個
$x=\boxed{\text{とな}}+\sqrt{\boxed{\text{にぬ}}}$	$x=-1+\sqrt{11}$

解説

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-3 & \left(x\leqq\frac{1-\sqrt{13}}{2},\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\leqq x\right) \\ -x^2+x+3 & \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$$

また，

$$\left|\frac{3}{2}x+3\right|=\begin{cases} -\frac{3}{2}x-3 & (x\leqq-2) \\ \frac{3}{2}x+3 & (-2\leqq x) \end{cases},\quad \left|\frac{3}{2}x-10\right|=\begin{cases} -\frac{3}{2}x+10 & \left(x\leqq\frac{20}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x-10 & \left(\frac{20}{3}\leqq x\right) \end{cases}$$

$$\therefore \left|\frac{3}{2}x+3\right|-\left|\frac{3}{2}x-10\right|=\begin{cases} -13 & (x\leqq-2) \\ 3x-7 & \left(-2\leqq x\leqq\frac{20}{3}\right) \\ 13 & \left(\frac{20}{3}\leqq x\right) \end{cases}$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} 13 & \left(x\leqq-2,\ x\leqq\frac{20}{3}\right) \\ -3x+7 & \left(-2\leqq x\leqq\frac{7}{3}\right) \\ 3x-7 & \left(\frac{7}{3}\leqq x\leqq\frac{20}{3}\right) \end{cases}$$

(1) $x<-2$ のとき，

$$g(x)=13$$

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-x-3 \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4} \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $x<-2$ において単調に減少する。$\lim_{x\to-\infty}(x^2-x-3)=\infty$ かつ $f(-2)=3$ であるから，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの $x<-2$ における共有点の個数は **1 個** である。

(2)　$-2 < \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} < \dfrac{7}{3} < \dfrac{20}{3}$ より，次のように場合分けを行う。

(i)　$x \leqq -2$ のとき，(1) より，共有点は 1 個である。

(ii)　$-2 \leqq x \leqq \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x^2-x-3)-(-3x+7) \\ &= x^2+2x-10 \\ &= (x+1)^2-11 < 0 \end{aligned}$$

よって，共有点はない。

(iii)　$\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (-x^2+x+3)-(-3x+7) \\ &= -x^2+4x-4 \\ &= -(x-2)^2 \leqq 0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)=g(x)$ の実数解は $x=2$ のみであるため，共有点は $(2,\ 1)$ の 1 個である。

(iv)　$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{7}{3}$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x^2-x-3)-(-3x+7) \\ &= x^2+2x-10 \\ &= (x+1)^2-11 \end{aligned}$$

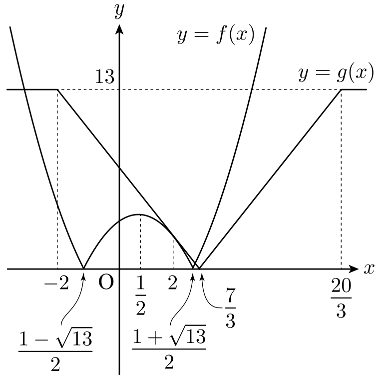
$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} < -1+\sqrt{11} < \dfrac{7}{3}$ より，$f(x)=g(x)$ の実数解は $x=-1+\sqrt{11}$ のみであるため，共有点は $\left(-1+\sqrt{11},\ 10-3\sqrt{11}\right)$ の 1 個である。

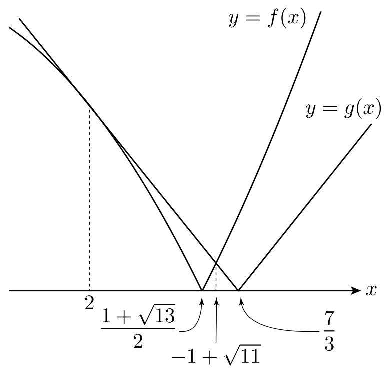
(v)　$\dfrac{7}{3} \leqq x \leqq \dfrac{20}{3}$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x^2-x-3)-(3x-7) \\ &= x^2-4x+4 \\ &= (x-2)^2 > 0 \end{aligned}$$

よって，共有点はない。

(vi)　$\dfrac{20}{3} \leqq x$ のとき，$f\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{313}{9} > 13$ かつ $f(x)$ は単調に増加するため，共有点はない。





(i)〜(vi) より，求める共有点の個数は **3 個** であり，そのうち x 座標が最も大きいのは $\boldsymbol{x=-1+\sqrt{11}}$ である。

講評

1. ［複素数と方程式，複素数平面］（やや難）

(1) 因数定理を用いて多項式の割り算をする問題。ここは解いておきたい。

(2) 一旦複素数平面上に図を描いてみると，実軸上の点 2 と共役複素数 z，w が直角二等辺三角形になる条件が分かるだろう。式で解こうとすると計算がやや煩雑である。

2. ［図形と方程式］（標準）

(1) 基本問題。線分の中点は円 C の中心を通る直線 ℓ に垂直な直線との交点として求めると楽である。解いておきたい。

(2) 円 C と直線 ℓ の共有点を通る円の方程式を作り，それが y 軸に接する条件（$x=0$ を代入して，判別式が 0）を求めれば楽である。愚直に計算しようとすると苦労する。

3. ［数列，極限］（易）

(1) 両辺を $(n+1)$ 倍することで，$\{b_n\}$ についての階差型になる。誘導が親切で解きやすい。

(2) 自然対数の底 e の定義に基づいて計算する問題。覚えていれば解ける。

4. ［整数］（標準）

正の約数が 12 個となるのは素因数が 3 種類以下のときであり，最も小さいのは $2^2\cdot3^1\cdot5^1$ のときである。(1) で 2，3 だけの場合のみ考えているが，他のパターンもあることに気付けるかどうかで差がつく。

5. ［積分法］（やや難）

面積，回転体の体積の問題。

(1) 必ず解きたい。

(2) $y \leqq 0$ の部分のグラフを折り返して $y \geqq 0$ の部分に集める。

(3) バウムクーヘン積分を使えばよいが発展的な内容である。$\int \pi x^2 dy$ の dy を dx に置換してもできるが，計算は面倒である。(2)，(3) で計算が多く，正確に解けたかどうかで差がつくかと思われる。

6. ［2 次関数，絶対値］（やや難）

関数とグラフの問題で，絶対値の場合分けや交点の位置について細かい確認が必要である。(2) では $y=g(x)$ のグラフの姿が正しくつかめていても $y=f(x)$ のグラフとの位置関係も微妙で，かなり根気を使う。

全体として昨年度よりやや難化した印象。かなりの計算量に苦労させられたことかと思われる。目標は 7 割前後。