# 解答速報

# 福岡大学医学部（推薦）　数学

2020年 11月29日実施

［I］ 次の $\boxed{\phantom{(1)}}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) $n$ が自然数のとき，$\sqrt{n^2-4n+15}$ が自然数となるすべての $n$ を求めると $\boxed{(1)}$ である。

(ii) 四面体 OABC が $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ をみたすとする。辺 BC を $1:2$ に内分する点を H，線分 AH を $3:2$ に内分する点を I とする。直線 OI が 3 点 A，B，C を通る平面と垂直に交わるとき，△ABC の面積は $\boxed{(2)}$ である。

(iii) 定数 $a$，$b$ が $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{4x+a}-b}{x-3}=\frac{2}{5}$ をみたすとき，$(a,\ b)=\boxed{(3)}$ である。

(iv) $a$ を実数とする。$z=2+ai$ とするとき，複素数平面上で複素数 $\dfrac{1-i}{z+i}$ が表す点を P とする。このとき，点 P からの距離が $a$ によらずに一定となる点を表す複素数は $\boxed{(4)}$ である。ただし，$i$ は虚数単位とする。

解答

(i) (1) 7　　(ii) (2) $\dfrac{\sqrt{105}}{6}$　　(iii) (3) $(13,\ 5)$　　(iv) (4) $\dfrac{1-i}{4}$

解説

(i) $\sqrt{n^2-4n+15}=m$（$m$ は自然数）とする。両辺を 2 乗すると，

$$
\begin{aligned}
n^2-4n+15=m^2 &\iff (n-2)^2-m^2=-11\\
&\iff \{(n-2)+m\}\{(n-2)-m\}=-11\\
&\iff (n+m-2)(n-m-2)=-11
\end{aligned}
$$

$n$，$m$ は自然数より，$n+m-2$，$n-m-2$ はともに整数であり，

$$n+m-2\geqq0$$

また，11 は素数であるため，

$$\begin{cases} n+m-2=1\\ n-m-2=-11\end{cases}\quad \text{または}\quad \begin{cases} n+m-2=11\\ n-m-2=-1\end{cases}$$

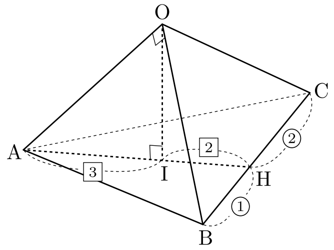
これを解いて，

$$(n,\ m)=(-3,\ 6),\ (7,\ 6)$$

$n>0$ より，

$$\boldsymbol{n=7}$$

(ii)




$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とする。条件より,

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1,\ |\overrightarrow{c}| = 2,\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}\right) \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{b} + \frac{1}{5}\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{b} + \frac{1}{5}\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(-2|\overrightarrow{a}|^2 + 2|\overrightarrow{b}|^2 + \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\right)\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{b} + \frac{1}{5}\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - 2|\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{c}|^2 - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + 2\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OI}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

よって,

$$\begin{cases}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 0 \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + 2 = 0\end{cases} \qquad \therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = -\frac{2}{3}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= |\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}|^2 \\ &= |\overrightarrow{c}|^2 - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + |\overrightarrow{a}|^2 \\ &= 4 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \\ &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= |\vec{c}-\vec{b}|^2\\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2\\ &= 4 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\\ &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2 \quad \therefore \mathrm{AC} = \mathrm{BC}$$

$\triangle$ABC は AC $=$ BC の二等辺三角形である。辺 AB の中点を M とすると，CM $\perp$ AB より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CM} &= \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AM}^2}\\ &= \sqrt{\frac{19}{3} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{35}{6}}\end{aligned}$$

よって，

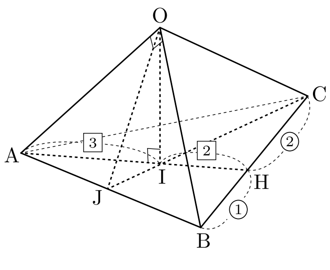
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{35}{6}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{6}}\end{aligned}$$

(別解)

AB $= \sqrt{2}$ より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{19}{3} - 1^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{6}}\end{aligned}$$

(別解)




図のように点 J をとると，メネラウスの定理より，

$$\mathrm{AJ}:\mathrm{JB} = 1:1,\ \ \mathrm{JI}:\mathrm{IC} = 1:4$$

がわかる。このとき，

$$\mathrm{OI}^2 = \mathrm{OJ}^2 - \mathrm{JI}^2,\ \ \mathrm{OI}^2 = \mathrm{OC}^2 - \mathrm{IC}^2$$

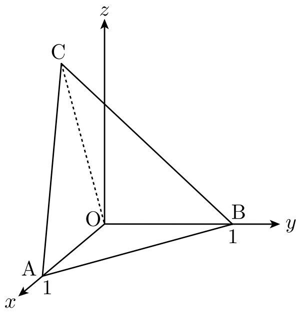
より，

$$\mathrm{CJ} = \frac{\sqrt{210}}{6}$$

また，平面 OIJ⊥ AB より，CJ ⊥ AB であるため，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CJ}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\frac{\sqrt{210}}{6}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{6}}\end{aligned}$$

(別解)




座標空間において，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C($a$, $b$, $c$) ($c > 0$) とすると，

$$|\overrightarrow{c}| = 2,\ \ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = -\frac{2}{3}$$

より，

$$a = b = -\frac{2}{3},\ \ c = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

外積を用いることにより，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{7},\, 2\sqrt{7},\, 7\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{6}}\end{aligned}$$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{4x+a}-b}{x-3}\cdots$① の分母について，

$$\lim_{x\to3}(x-3) = 0$$

よって，極限 ① が収束するとき，① の分子についても，

$$\lim_{x\to3}\left(\sqrt{4x+a}-b\right) = 0$$

すなわち，

$$\sqrt{4\cdot3+a}-b = 0 \iff b = \sqrt{a+12}\cdots②$$

が成り立つ必要がある。このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+a}-b}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+a}-\sqrt{a+12}}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{(4x+a)-(a+12)}{(x-3)\left(\sqrt{4x+a}+\sqrt{a+12}\right)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{4x+a}+\sqrt{a+12}\right)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{4}{\sqrt{4x+a}+\sqrt{a+12}}\\&=\frac{4}{\sqrt{4\cdot 3+a}+\sqrt{a+12}}\\&=\frac{2}{\sqrt{a+12}}\end{aligned}$$

①$=\dfrac{2}{5}$ より，

$$\frac{2}{\sqrt{a+12}}=\frac{2}{5}\qquad \therefore a=13$$

② より，

$$b=5$$

よって，

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 5)}$$

(iv) $a$ を実数全体で動かしたときに，$\dfrac{1-i}{z+i}=\dfrac{1-i}{2+(a+1)i}$ が描く図形を考える。

$w=\dfrac{1-i}{2+(a+1)i}$ とすると，$w\neq 0$ より，

$$a=\frac{-i-1}{w}+2i-1$$

$a$ は実数であるため，

$$\overline{a}=a$$

よって，

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{-i-1}{w}+2i-1\right)}=\frac{-i-1}{w}+2i-1 &\iff \frac{i-1}{\overline{w}}-2i-1=\frac{-i-1}{w}+2i-1\\&\iff 4iw\overline{w}-(-1+i)w-(1+i)\overline{w}=0\\&\iff w\overline{w}-\frac{1+i}{4}w-\frac{1-i}{4}\overline{w}=0\\&\iff \left|w-\frac{1-i}{4}\right|^2=\frac{1}{8}\\&\iff \left|w-\frac{1-i}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$w$ が表す点は，点 $\dfrac{1-i}{4}$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ の円周上を動くこととなり，点 $\dfrac{1-i}{4}$ 以外に条件を満たす点は存在しない。したがって，求める複素数は，

$$\boldsymbol{\frac{1-i}{4}}$$

［II］（記述問題）

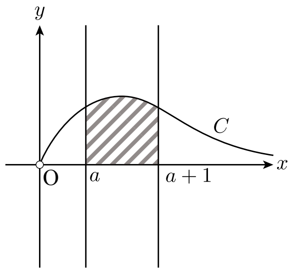
曲線 $C : y = \dfrac{4x}{4x^2+7}$ $(x>0)$ について次の問に答えよ。

(i)　$a>0$ とする。曲線 $C$，$x$ 軸，直線 $x=a$ および直線 $x=a+1$ とで囲まれる部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(ii)　$S(a)$ の最大値と，その最大値を与える $a$ の値を求めよ。

解答

(i)




$x>0$ において，$y=\dfrac{4x}{4x^2+7}>0$ より，

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^{a+1} \frac{4x}{4x^2+7}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^{a+1} \frac{(4x^2+7)'}{4x^2+7}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log(4x^2+7)\Big]_a^{a+1} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{4a^2+8a+11}{4a^2+7}}
\end{aligned}
$$

(ii)　(i) より，

$$
\begin{aligned}
S'(a) &= \frac{d}{da}\int_a^{a+1} \frac{4x}{4x^2+7}\,dx \\
&= \frac{4(a+1)}{4(a+1)^2+7} - \frac{4a}{4a^2+7} \\
&= -\frac{4(4a^2+4a-7)}{(4a^2+8a+11)(4a^2+7)}
\end{aligned}
$$

$S'(a)=0$ のとき，$4a^2+4a-7=0$ より，

$$
a = -\frac{1}{2}+\sqrt{2} \quad (\because a>0)
$$

$\alpha = -\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$ とすると，$S(a)$ の増減表は次の通り。

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $S(a)$ | | $\nearrow$ | $S(\alpha)$ | $\searrow$ |

$S(a)$ は $a=\alpha$ で最大となる。$S'(\alpha)=0$ より，

$$
4\alpha^2+4\alpha-7=0 \iff 4\alpha^2 = -4\alpha+7
$$

$$\begin{aligned}\therefore S(\alpha) &= \frac{1}{2}\log\frac{4\alpha+18}{14-4\alpha}\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{2\alpha+9}{7-2\alpha}\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}{7}\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\ \text{で最大値}\ \frac{1}{2}\log\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}{7}}$$

（別解）

$$\begin{aligned}S(a) &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{8a+4}{4a^2+7}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{4}{(2a+1)+\dfrac{8}{2a+1}-2}\right)\end{aligned}$$

$2a+1>0$，$\dfrac{8}{2a+1}>0$ なので，相加平均・相乗平均の大小関係より，

$$\begin{aligned}(2a+1)+\frac{8}{2a+1}-2 &\geqq 2\sqrt{(2a+1)\cdot\frac{8}{2a+1}}-2\\ &= 4\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

よって，

$$S(a) \leqq \frac{1}{2}\log\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}{7}$$

等号が成立するとき，$2a+1=\dfrac{8}{2a+1}$ より，

$$(2a+1)^2=8 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\ \text{で最大値}\ \frac{1}{2}\log\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}{7}}$$

講評

## [I]

(i) [整数](易)

(与式) = (自然数) とおいて 2 乗し，因数分解するタイプの問題である。ここは落とせない。

(ii) [空間ベクトル](やや難)

条件から分点を求め，内積計算するだけではあるが計算量が多い。場合によっては後回しにするのも手である。

(iii) [極限](やや易)

典型的な極限値からの係数決定の問題である。方針はシンプルなので，ミスがなければ解けるはず。

(iv) [複素数平面](やや難)

点 P が描く図形が円であることがイメージできるかが分かれ目であり，受験生は計算ミスしがちな問題である。計算量も多く，方針が立たない場合は他に時間をかけるべきかと思われる。

## [II] [数III微積分](標準)

(i) 積分の計算問題として基本レベルであり，確実に解いておきたい。

(ii) 方針によって解答時間に差が出ると思われる。(i) の $S(a)$ をそのまま微分してもよいが，$\displaystyle\int_a^{a+1} \frac{4x}{4x^2+7}\,dx$ 自体を $a$ で微分すれば手間が省ける。また，$a>0$ より，相加平均・相乗平均の関係式に持ち込めれば，微分も不要である。

去年の問題よりは若干易しくなっているが，それでも難しく，制限時間内に全問解くのは難しいだろう。[ I ] (i), (iii), [ II ] (i) を確実に解き，残った時間で計算量は多いが方針が見えている [ II ] (ii) と [ I ] (ii) を解答，余裕があれば (iv) に手をつけるというのがベストかと思われる。目標は 60 %。